

## 算例 1-014

### 框架- 特征值问题

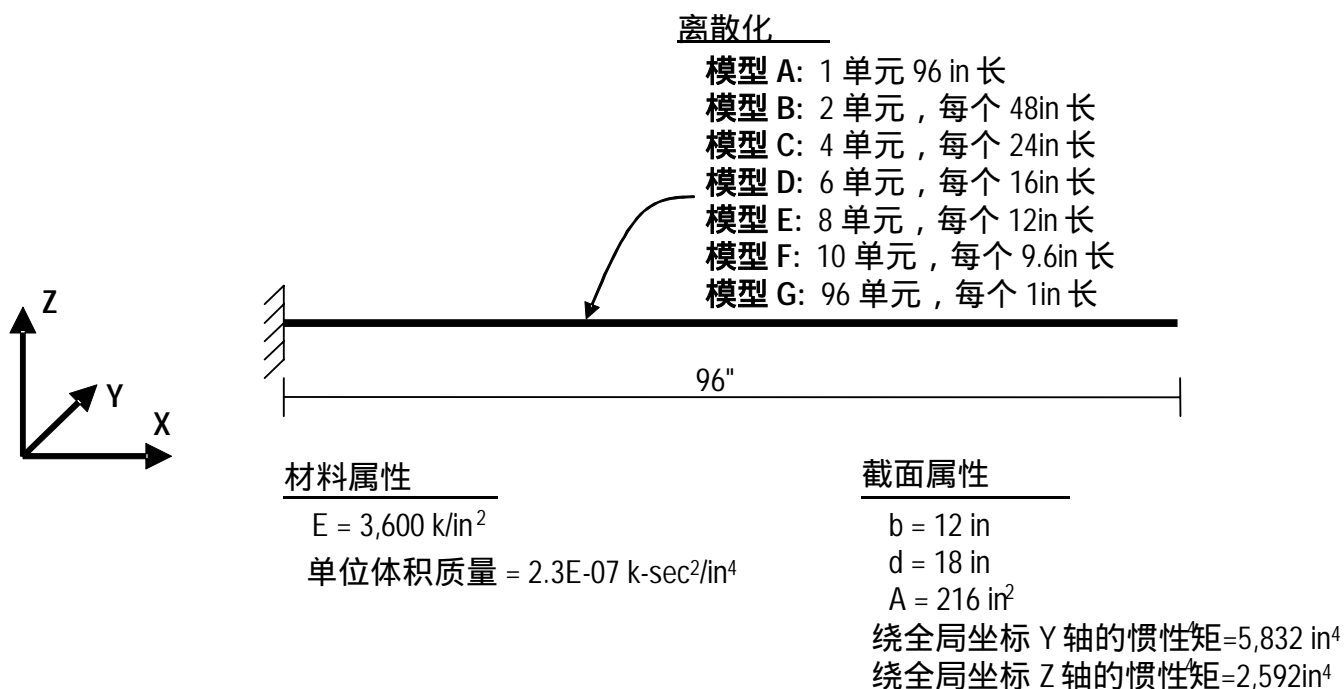
#### 例题注释

SAP2000 中特征值问题是通过一根悬臂梁的振动进行校验的。

本例中使用了几个  $I_{22} \neq I_{33}$  的 8ft 长的混凝土悬臂梁模型。每个模型都有一个不同的细分。本例中拿出了每个模型中前五个弯曲振型特征值与基于 Clough and Penzien 1975 的手算结果进行了对比。

**重要注释:**只考虑弯曲振型并进行比较，通过设定框架属性修改系数中抗剪截面面积为 0 来忽略剪切变形。轴向和扭转振型是通过去除  $U_x$  和  $R_x$  自由度从分析中去除的。

#### 几何和属性参数



## 校验的 SAP2000 的技术特色

- 对于弯曲振型，带有不同惯性矩的框架线对象( $I_{22} \neq I_{33}$ )的特征值分析。
- 自动框架线单元细分

## 结果对比

手算解是使用 Clough and Penzien 1975, P313 中提供的公式，通过一个质量均匀、刚度不变的悬臂梁对象，进行的手算结果。

模型	输出参数	模型	SAP2000	手算解	差异百分比
1  绕 Z-轴的 第一个弯曲 振型	周期、S	A (1 elem)	0.054547	0.038005	+43.53%
		B (2 elems)	0.042333		+11.39%
		C (4 elems)	0.039090		+2.85%
		D (6 elems)	0.038485		+1.26%
		E (8 elems)	0.038273		+0.71%
		F (10 elems)	0.038175		+0.45%
		G (96 elems)	0.038003		-0.01%
2  绕 Y-轴的 第一个弯曲振 型	周期、S	A (1 elem)	0.036364	0.025337	+43.52%
		B (2 elems)	0.028222		+11.39%
		C (4 elems)	0.026060		+2.85%
		D (6 elems)	0.025657		+1.26%
		E (8 elems)	0.025516		+0.71%
		F (10 elems)	0.025450		+0.45%
		G (96 elems)	0.025335		-0.01%

PROGRAM NAME: SAP2000  
REVISION NO.: 0

模型	输出参数	模型	SAP2000	手算解	差异百分比
3  绕 Z-轴的 第二个 弯曲振 型	周期、S	A (1 elem)	N.A.	0.006064	N.A.
		B (2 elems)	0.008218		+35.52%
		C (4 elems)	0.006651		+9.68%
		D (6 elems)	0.006330		+4.39%
		E (8 elems)	0.006214		+2.47%
		F (10 elems)	0.006160		+1.58%
		G (96 elems)	0.006065		+0.02%
4  绕 Y-轴的 第二个 弯曲振 型	周期、S	A (1 elem)	N.A.	0.004043	N.A.
		B (2 elems)	0.005479		+35.52%
		C (4 elems)	0.004434		+9.67%
		D (6 elems)	0.004220		+4.38%
		E (8 elems)	0.004143		+2.47%
		F (10 elems)	0.004107		+1.58%
		G (96 elems)	0.004043		0%
5  绕 Z-轴的 第三个 弯曲振 型	周期、S	A (1 elem)	N.A.	0.002165	N.A.
		B (2 elems)	N.A.		N.A.
		C (4 elems)	0.002511		+15.98%
		D (6 elems)	0.002321		+7.21%
		E (8 elems)	0.002254		+4.11%
		F (10 elems)	0.002222		+2.63%
		G (96 elems)	0.002166		+0.05%

PROGRAM NAME:	<u>SAP2000</u>
REVISION NO.:	<u>0</u>

需要注意的是 SAP2000 中模型 A, B, C, D, E, F 和 G 中的结果都是质量集中分析，质量分别集中在 96 in, 48 in, 24 in, 16 in, 12 in, 9.6 in and 1 ft, 手算结果是从均匀分散质量出发的。

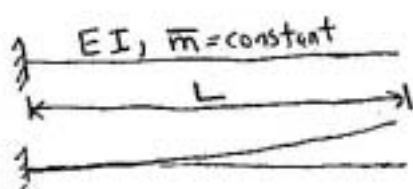
**计算模型文件:** Example 1-014a, Example 1-014b, Example 1-014c, Example 1-014d, Example 1-014e, Example 1-014f, Example 1-014g

### 结论

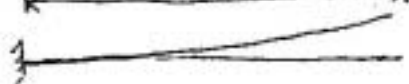
SAP2000 结果显示当框架梁对象细分情况趋近于均匀质量时，计算结果与手算结果之间的误差是可以接受的。在这个算例中，悬臂梁需要至少细分到所考虑振型数量的三倍时，程序结果与手算结果的对比才是可以接受的。比如，当考虑第二振型时（在这个算例中，SAP2000 的振型数是 3 和 4），框架梁至少需要细分为  $2 * 3 = 6$  个单元。

## 手算过程

Reference: Clough and Penzien, 1975 page 313



$\bar{m}$  = mass per unit length



$$\omega_1 = (1.875)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$$



$$\omega_2 = (4.694)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$$



$$\omega_3 = (7.855)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$$

---


$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \bar{m} = m A \text{ where } m = \text{mass per unit volume}$$

Thus,

$$T_1 = \frac{2\pi}{(1.875)^2} \sqrt{\frac{mAL^4}{EI}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{(4.694)^2} \sqrt{\frac{mAL^4}{EI}}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{(7.855)^2} \sqrt{\frac{mAL^4}{EI}}$$

Weak Direction

$$2\pi \sqrt{\frac{mAL^4}{EI_{22}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.3E-07 \times 216 \times 96^4}{3600 \times 2592}} = 0.133611666$$

$$T_1 \text{ weak} = \frac{0.133611666}{1.875^2} = 0.038005$$

$$T_2 \text{ weak} = \frac{0.133611666}{4.694^2} = 0.006064$$

$$T_3 \text{ weak} = \frac{0.133611666}{7.855^2} = 0.002165$$

Strong Direction

$$2\pi \sqrt{\frac{mAL^4}{EI_{33}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.3E-07 \times 216 \times 96^4}{3600 \times 5832}} = 0.089074444$$

$$T_1 \text{ strong} = \frac{0.089074444}{1.875^2} = 0.025337$$

$$T_2 \text{ strong} = \frac{0.089074444}{4.694^2} = 0.004043$$

$$T_3 \text{ strong} = \frac{0.089074444}{7.855^2} = 0.001444$$

Ordering the first five periods from longest to shortest

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.038005 \\ T_2 &= 0.025337 \\ T_3 &= 0.006064 \\ T_4 &= 0.004043 \\ T_5 &= 0.002165 \end{aligned}$$